Über die Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels.

Von Börge Jessen in Kopenhagen.

Es bezeichne f eine im Intervalle $0 \leq x \leq 1$ positive, stetige Funktion. Ist nun p eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet man als *Mittelwert p^{ter} Ordnung* $M_p(f)$ der Funktion f, falls $p \neq 0$, die Grösse

$$M_p(f) = \left[\int_0^1 f^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1a}$$

falls $p = 0$, die Grösse

$$M_0(f) = e^{\int_0^1 \log f \, dx}. \tag{1b}$$

Für jeden Wert von p liegt $M_p(f)$ zwischen der (positiven) unteren Grenze und der (endlichen) oberen Grenze von f; die Bezeichnung Mittelwert ist somit berechtigt. Ist $f = c$, wobei c eine positive Konstante bedeutet, so ist $M_p(f) = c$ für jeden Wert von p. In dem allgemeinen Fall, wo f nicht konstant ist, gilt der wichtige Satz, dass wenn p von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, so *wächst* $M_p(f)$ stetig von der unteren bis zur oberen Grenze von f; diese Grenzen sind also in dem Begriff des Mittelwertes als $M_{-\infty}(f)$ und $M_{+\infty}(f)$ enthalten. Nach diesem Satz, der in vollem Umfang wohl zuerst von Jensen[1]) beweisen wurde, deckt sich für stetige Funktionen der

[1]) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta mathematica*, **30** (1906), S. 175—193. Mehrere Verfasser betrachten $M_p(f)$ nur für $0 \leq p < +\infty$; von hier aus vermittelt die Relation $M_p(f) = \dfrac{1}{M_{-p}\left(\frac{1}{f}\right)}$ den Übergang zu dem vollen Intervall $-\infty < p < +\infty$.

Begriff des Mittelwertes mit dem Begriff des Zwischenwertes. Für $p = -1, 0$ und 1 ist $M_p(f)$ gleich dem harmonischen, dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel der Funktion f. Für dieselben gelten die Ungleichungen

$$M_{-1}(f) < M_0(f) < M_1(f),$$

sobald die Funktion f keine Konstante ist.

Für die letzte dieser Ungleichungen haben neulich F. Riesz[2]) und kurz vorher Hoheisel[3]) einen einfachen Beweis veröffentlicht, dessen Grundgedanke schon früher von F. Riesz[4]) und kurz danach von Hardy[5]) für einen Beweis der Hölderschen Ungleichung benutzt worden war. Mit Hilfe derselben Beweismethode, unter Hinzunahme einer geeigneten Normierung, wird im folgenden der allgemeine Satz über die Variation von $M_p(f)$ mit p bewiesen. Nebenbei wird gezeigt, dass die Mittelwerte $M_p(f)$ unter allen in ähnlicher Weise zu definierenden Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels eine besondere Rolle spielen. Schliesslich wird in einem Anhang die Methode zu einer einfachen Begründung der Jensenschen Theorie verwendet.

Bedeutet g eine beliebige im Intervalle $0 \leq x \leq 1$ definierte, stetige Funktion, so bezeichnen wir als arithmetisches Mittel $A(g)$ von g das Integral

$$A(g) = \int_0^1 g\,dx.$$

Hiernach lassen sich die oben eingeführten Mittelwerte $M_p(f)$ positiver Funktionen f in der folgenden Weise als *Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels* auffassen: Es bedeute $u = \varphi(t)$ eine für $0 < t < \infty$ definierte, stetige und monotone (d. h. entweder stets wachsende oder stets abnehmende) Funktion; mit $t = \varphi^{-1}(u)$ be-

---

[2]) F. Riesz, Sur les valeurs moyennes des fonctions, *The Journal of the London Mathematical Society*, **5** (1930), S. 120—121. An dieser Stelle wird auch ein Beweis der Grenzgleichung $M_0(f) = \lim M_p(f)$ für $p \to +0$ gegeben, mit welchem der unten gegebene inhaltlich äquivalent ist.

[3]) G. Hoheisel, Nullstellenanzahl und Mittelwerte der Zetafunktion, *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse*, 1930, S. 72—82, insbes. S. 78.

[4]) F. Riesz, Su alcune disuguaglianze, *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*, **7** (1928), S. 77—79.

[5]) G. H. Hardy, Prolegomena to a chapter on inequalities, *The Journal of the London Mathematical Society*, **4** (1929), S. 61—78.

zeichnen wir die in ihrem Definitionsbereich ebenfalls stetige und monotone *inverse* Funktion von φ. Für jede beliebige im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ positive, stetige Funktion f gehört die Zahl $A(\varphi(f)) = \int_0^1 \varphi(f)\,dx$ dem Definitionsbereich von φ^{-1} an; wir setzen

$$A_\varphi(f) = \varphi^{-1}(A(\varphi(f))) = \varphi^{-1} \int_0^1 \varphi(f)\,dx.$$

$A_\varphi = \varphi^{-1} A \varphi$ wird als *das durch φ transformierte arithmetische Mittel* bezeichnet. Für $\varphi(t) = t^p$, $p \neq 0$, bzw. für $\varphi(t) = \log t$ ergibt sich als A_φ der Mittelwert M_p bzw. der Mittelwert M_0.

Ist $f = c$, wobei c eine positive Konstante bedeutet, so ergibt sich $A_\varphi(c) = \varphi^{-1} A \varphi(c) = \varphi^{-1}\varphi(c) = c$. Wird $\psi(t) = \alpha\varphi(t) + \beta$ gesetzt, wobei $\alpha \neq 0$ und β Konstanten bedeuten, so ergibt sich $\psi^{-1}(u) = \varphi^{-1}\left(\frac{u-\beta}{\alpha}\right)$ und demnach für jede Funktion f

$$A_\psi(f) = \psi^{-1} A \psi(f) = \varphi^{-1}\left(\frac{A(\alpha\varphi(f) + \beta) - \beta}{\alpha}\right) = \varphi^{-1} A \varphi(f) = A_\varphi(f).$$

Hieraus ziehen wir den folgenden wichtigen Schluss: Bei einem vorgelegten transformierten arithmetischen Mittel A_φ darf man stets φ als *normiert* annehmen, so dass z. B. $\varphi(1) = 0$ ist, und so, dass wenn φ an der Stelle 1 differentierbar mit von Null verschiedener Ableitung ist, $\varphi'(1) = 1$ ist. Insbesondere darf man φ stets als monoton wachsend annehmen. Nimmt man diese Normierung in dem oben betrachteten Spezialfall vor, so ergibt sich für die Mittelwerte M_p die Darstellung

$$M_p = A_{\varphi_p} = \varphi_p^{-1} A \varphi_p,$$

wobei für $p \neq 0$

(2a) $$\varphi_p(t) = \frac{t^p - 1}{p},$$

während für $p = 0$

(2b) $$\varphi_0(t) = \log t.$$

Die Formeln (2a) und (2b) fassen wir in die *eine* für alle p gültige zusammen

$$\varphi_p(t) = \int_1^t t^{p-1}\,dt.$$

Die Funktionen φ_p sind alle monoton wachsend, ferner ist $\varphi_p(1)=0$ für alle p, während sonst $\varphi_p<\varphi_q$ sobald $p<q$. Ändert sich p wenig, so ändert sich dabei sowohl die Funktion φ_p wie auch ihre inverse Funktion φ_p^{-1} nur wenig, und zwar gleichmässig wenig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $0<t<\infty$, bzw. von dem (mit p veränderlichen) Definitionsbereich von φ_p^{-1}. Hieraus ergibt sich ohne weiteres für jede im Intervalle $0\leqq x\leqq 1$ positive, stetige Funktion f die stetige Variation von $M_p(f)=\varphi_p^{-1}A\varphi_p(f)$ mit p. Es lässt sich aber aus dem Verlauf der Funktionen φ_p auch die Monotonität von $M_p(f)$ als Funktion von p, d. h. die Ungleichung $M_p(f)<M_q(f)$ für $p<q$ (sobald die Funktion f keine Konstante ist) ablesen. Hierzu beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.[6])

Es seien φ und ψ zwei im Intervalle $0<t<\infty$ stetige, monoton wachsende Funktionen, für die $\varphi(1)=\psi(1)=0$, während sonst $\varphi<\psi$ ist. Die entsprechenden Mittelwerte $A_\varphi=\varphi^{-1}A\varphi$ und $A_\psi=\psi^{-1}A\psi$ mögen die gemeinsame Eigenschaft haben, dass für jede Funktion f und für jede positive Konstante k

$$A_\varphi(kf)=kA_\varphi(f) \text{ und } A_\psi(kf)=kA_\psi(f).$$

Dann gilt für jede nicht konstante Funktion f die Ungleichung

$$A_\varphi(f)<A_\psi(f).$$

Die Voraussetzung über die Funktionen φ und ψ erlaubt uns bei dem Beweis dieser Ungleichung zunächst f durch Multiplikation mit einer passenden Konstanten k zu normieren. Wir wählen $k=\dfrac{1}{A_\psi(f)}$; dann ist zu beweisen, dass wenn f eine nicht konstante Funktion bedeutet, für welche $A_\psi(f)=1$ ist, die Ungleichung $A_\varphi(f)<1$ besteht. Dass $A_\psi(f)=\psi^{-1}A\psi(f)=1$ ist, bedeutet, dass $A(\psi(f))=\int\limits_0^1\psi(f)dx=0$ ist; dass $A_\varphi(f)=\varphi^{-1}A\varphi(f)<1$ sein soll, bedeutet, dass $A(\varphi(f))=\int\limits_0^1\varphi(f)dx<0$ sein soll. Das letztere ist aber der Fall; denn nach Voraussetzung ist $\varphi\leqq\psi$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $t=1$ gilt, und f ist ja nicht konstant $=1$.

Um den bewiesenen Hilfssatz auf die Mittelwerte $M_p=A_{\varphi_p}$

---

[6]) Der Beweis dieses Hilfssatzes ist genau der von F. Riesz und Hoheisel für die Ungleichung $M_0(f)<M_1(f)$ gegebene.

anwenden zu können, müssen wir den Satz beweisen, dass für jede positive Konstante k und für jede Funktion f

$$M_p(kf) = k M_p(f). \tag{3}$$

Dies folgt aber unmittelbar aus den Definitionen (1a) und (1b). Hiermit erweist sich die Ungleichung $M_p(f) < M_q(f)$ für $p < q$ als eine Folgerung der Ungleichung $\varphi_p < \varphi_q$ für $p < q$ und $t \neq 1$.

Dass endlich die Grenzwerte $M_{-\infty}(f)$ und $M_{+\infty}(f)$ von $M_p(f)$ gleich der unteren und der oberen Grenze der stetigen Funktion f sind, ist allgemein bekannt; der Beweis braucht an dieser Stelle nicht wiederholt zu werden.

Hiernach ist der Satz über die Variation von $M_p(f)$ in allen Einzelheiten bewiesen. Er zeigt, dass wir in den Mittelwerten $M_p(f)$, $-\infty < p < +\infty$, eine vollständige Skala von Mittelwerten besitzen, insofern für jede Funktion f jeder Wert zwischen der unteren und der oberen Grenze als Mittelwert von f für ein entsprechendes p dargestellt wird. Bei dem Beweis dieses Satzes haben wir in entscheidender Weise von der durch (3) ausgedrückten Eigenschaft der Mittelwerte M_p — die man als *Homogeneität* von M_p bezeichnen könnte — Gebrauch gemacht. Es erhebt sich somit die Frage: Welche Eigenschaft muss eine monotone Funktion φ besitzen, damit für das entsprechende transformierte Mittel $A_\varphi = \varphi^{-1} A \varphi$ die Relation

$$A_\varphi(kf) = k A_\varphi(f) \tag{4}$$

stets bestehe? Es zeigt sich, dass diese Relation für die Mittelwerte $M_p = A_{\varphi_p}$ *charakteristisch* ist, dass m. a. W. die Relation (4) dann und nur dann für jede positive Konstante k und für jede Funktion f erfüllt ist, wenn die monotone Funktion φ durch eine Normierung der oben betrachteten Art in eine der Funktionen φ_p übergeht. Wir beweisen diesen Satz, der die Mittelwerte M_p aus der Menge aller transformierten Mittel $A_\varphi = \varphi^{-1} A \varphi$ hervorhebt, in der folgenden Weise.

Es bezeichne θ eine Zahl im Intervalle $0 < \theta < 1$; ferner seien a und $b > a$ zwei positive Konstanten; für jede positive Zahl $\varepsilon < \theta$ betrachten wir diejenige im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ positive, stetige Funktion f_ε, die im Intervalle $0 \leqq x \leqq \theta - \varepsilon$ gleich a ist, im Intervalle $\theta \leqq x \leqq 1$ gleich b ist, und die für $\theta - \varepsilon < x < \theta$ linear verläuft. Dann gilt offenbar für $\varepsilon \to 0$

$$A_\varphi(f_\varepsilon) = \varphi^{-1} A \varphi(f_\varepsilon) \to \varphi^{-1}(\theta\varphi(a) + (1-\theta)\varphi(b)),$$

und ebenso, wenn k eine positive Konstante bedeutet,

$$A_\varphi(kf_\varepsilon) \to \varphi^{-1}(\theta\varphi(ka)+(1-\theta)\varphi(kb)).$$

Aus der Relation (4) ergibt sich also für φ die Funktionalgleichung

$$(5)\quad \varphi^{-1}(\theta\varphi(ka)+(1-\theta)\varphi(kb)) = k\varphi^{-1}(\theta\varphi(a)+(1-\theta)\varphi(b)).$$

Schon aus dieser Gleichung werden wir den besonderen Charakter von φ erschliessen können. Betrachten wir für einen Augenblick in (5) a, b und k als konstant und lassen θ von 0 bis 1 variieren, so ergibt sich die folgende einfache geometrische Deutung der Funktionalgleichung: Übt man auf die (t, u)-Ebene eine lineare Transformation aus, wobei die Koordinatenachsen ihre Richtungen behalten, während die Punkte $(a, \varphi(a))$ und $(b, \varphi(b))$ in die Punkte $(ka, \varphi(ka))$ und $(kb, \varphi(kb))$ übergehen, so geht bei dieser Transformation das Kurvenstück $u=\varphi(t)$, $a<t<b$, in das entsprechende Kurvenstück $u=\varphi(t)$, $ka<t<kb$, über.

Aus dieser Deutung von (5) schliessen wir zunächst die Differentierbarkeit der Funktion φ für jeden Wert von t. Als monotone Funktion ist nämlich φ nach Lebesgue jedenfalls in einem Punkt l differentiierbar[7]); um hieraus die Differentiierbarkeit in dem beliebigen Punkt t zu beweisen, braucht man nur $k=\frac{t}{l}$ und $a<l<b$ zu wählen. Aus der geometrischen Deutung der Relation (5) ergibt sich für $a<l<b$ für jeden Wert von k die Relation

$$(6)\quad \frac{\varphi'(l)}{\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}} = \frac{\varphi'(kl)}{\dfrac{\varphi(kb)-\varphi(ka)}{kb-ka}}.$$

Für jeden Wert von l ist $\varphi'(l) \neq 0$; sonst wäre nämlich nach (6) $\varphi'(t)=0$ für jeden Wert von t, und φ wäre konstant gegen unsere Voraussetzung. Wir können also φ so normieren, dass $\varphi(1)=0$ und $\varphi'(1)=1$ wird.

Für festes l folgt aus (6) die Stetigkeit der Funktion $\varphi'(t)$. Andererseits folgt aus (6), dass für festes k die Grösse $\frac{\varphi'(kl)}{\varphi'(l)}$ von l unabhängig ist; zunächst ergibt sich dies nur für Werte l, die dem Intervall $a<l<b$ angehören; durch den Grenzübergang $a\to+0$ und $b\to+\infty$ ergibt sich der Satz für beliebige Werte von l. Wird speziell $l=1$ gewählt, so ergibt sich wegen $\varphi'(1)=1$

7) Die Heranziehung dieses Satzes lässt sich leicht vermeiden.

für jene Grösse der feste Wert $\varphi'(k)$; hiernach gilt für beliebige Werte von k und l

$$\varphi'(kl) = \varphi'(k)\,\varphi'(l).$$

Die Funktion $\varphi'(t)$ genügt somit der klassischen Funktionalgleichung, welche nach Cauchy[8]) als stetige Lösungen nur die Potenzen von t besitzt; es ist m. a. W. für irgend einen Wert von p

$$\varphi'(t) = t^{p-1},$$

d. h. aber, da $\varphi(1) = 0$ sein soll, dass

$$\varphi(t) = \int_1^t t^{p-1}\,dt = \varphi_p(t)$$

ist. Hiermit ist der Beweis des aufgestellten Satzes vollendet. Es zeigt sich die kuriose Tatsache, dass der anscheinend recht allgemeine Hilfssatz, der dem Beweis des Satzes über die monotone Variation von $M_p(f)$ zugrundegelegt wurde, in Wirklichkeit, wegen der unerwarteten Stärke seiner Voraussetzungen, mit dem Satze selbst identisch ist.

Anhang. Über konvexe Funktionen.

Die Tragweite der benutzten Beweismethode ist durch den Beweis des Satzes über die monotone Variation von $M_p(f)$ noch lange nicht erschöpft. In diesem Anhang werden wir sie zu einer einfachen Begründung der Jensenschen Theorie verwenden. Unsere Fragestellung ist die folgende: Welche Eigenschaften müssen überhaupt die monotonen Funktionen φ und ψ besitzen, damit für *jede* positive Funktion f die Ungleichung

$$A_\varphi(f) \leqq A_\psi(f) \tag{7}$$

bestehe? Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Funktionen φ und ψ beide monoton wachsend sind; dann ergibt sich die Antwort durch Heranziehung des Begriffs der *konvexen* Funktion.

Es seien a und $b > a$ beliebige positive Konstanten; dann ist es stets möglich die Funktion φ so zu normieren (d. h. durch eine neue Funktion $\alpha\varphi + \beta$ zu ersetzen) dass nach der Normierung

$$\varphi(a) = \psi(a) \quad \text{und} \quad \varphi(b) = \psi(b) \tag{8a}$$

[8]) A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, 1821, S. 111, oder *Oeuvres complètes*, 2e série, tome 3, S. 104.

sei.[9]) Gilt nun für beliebige $a > 0$ und $b > a$ nach dieser Normierung für $a < t < b$ die Ungleichung

$$\varphi(t) \geqq \psi(t), \tag{8b}$$

so heisst die Funktion ψ *als Funktion von* φ konvex. Es soll gezeigt werden, dass diese Eigenschaft der Funktionen φ und ψ für das Bestehen der Ungleichung (7) notwendig und hinreichend ist.

Dass die Bedingungen (8) für das Bestehen der Ungleichung (7) *notwendig* sind, liegt auf der Hand. Es seien a und $b > a$ positive Konstanten und es sei φ so normiert, dass die Bedingung (8a) erfüllt ist. Ferner bezeichne θ eine Zahl im Intervalle $0 < \theta < 1$. Wird dann für $\varepsilon < \theta$ mit f_ε die oben betrachtete, stückweise lineare Funktion bezeichnet, so gilt offenbar für $\varepsilon \to 0$

$$A_\varphi(f_\varepsilon) = \varphi^{-1} A\varphi(f_\varepsilon) \to \varphi^{-1}(\theta\varphi(a) + (1-\theta)\varphi(b))$$

und ebenso

$$A_\psi(f_\varepsilon) \to \psi^{-1}(\theta\psi(a) + (1-\theta)\psi(b)).$$

Aus der Relation (7) folgt somit die Relation

$$\varphi^{-1}(\theta\varphi(a) + (1-\theta)\varphi(b)) \leqq \psi^{-1}(\theta\psi(a) + (1-\theta)\psi(b)),$$

die aber, wegen (8a), mit der Bedingung (8b) identisch ist.

Dass die Bedingungen (8) für das Bestehen der Ungleichung (7) *hinreichend* sind, beweisen wir in der folgenden Weise. Zunächst folgt (was ich hier nicht näher begründen muss) aus den Bedingungen (8), dass, wenn t_0 eine beliebige positive Zahl bedeutet, es stets möglich ist die Funktion φ so zu normieren (d. h. durch eine neue Funktion $\alpha\varphi + \beta$ zu ersetzen), dass nach der Normierung

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0), \tag{9a}$$

während für $t \neq t_0$

$$\varphi(t) \leqq \psi(t) \;^{9)} \tag{9b}$$

sei. Aus dieser Eigenschaft der Funktionen φ und ψ lassen sich ihrerseits die Bedingungen (8) leicht herleiten; wir hätten also die Konvexität von ψ als Funktion von φ auch durch die Bedingungen (9) definieren können. Sei jetzt f eine vorgegebene Funktion, und sei $t_0 = A_\psi(f)$ gesetzt; dann ist zu beweisen, dass $A_\varphi(f) \leqq t_0$ ist. Sei φ so normiert, dass die Bedingungen (9) erfüllt sind. Dass $A_\psi(f) = \psi^{-1} A\psi(f) = t_0$ ist, bedeutet, dass $A(\psi(f)) = \int_0^1 \psi(f)dx = \psi(t_0)$

---

[9]) Bei dieser Normierung bleibt die Funktion φ monoton wachsend.

ist; dass $A_\varphi(f) = \varphi^{-1} A\varphi(f) \leq t_0$ sein soll, bedeutet, dass $A(\varphi(f)) = \int_0^1 \varphi(f)dx \leq \varphi(t_0)$ sein soll. Das letztere ist aber auf Grund der Bedingungen (9) der Fall.

Kehrt man in der Ungleichung (7) das Ungleichheitszeichen um, so bleiben die obigen Überlegungen richtig, wenn überall die Ungleichheitszeichen durch die umgekehrten ersetzt werden. In diesem Fall heisst die Funktion ψ als Funktion von φ *konkav*. Hieraus folgt speziell, dass in (7) das Gleichheitszeichen dann und nur dann für jede Funktion f besteht, wenn die Funktion ψ als Funktion von φ sowohl konvex wie konkav, also *linear* ist, d. h. wenn die Funktion φ durch eine Normierung in die Funktion ψ übergeht. Diese Bedingung, die wir oben als hinreichend für die Übereinstimmung der beiden transformierten Mittel A_φ und A_ψ erkannt haben, ist also zugleich notwendig.

*

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die obigen Betrachtungen unverändert bestehen bleiben, wenn an Stelle von gewöhnlichen Integralen Stieltjessche Integrale in Bezug auf eine stetige, monoton wachsende Funktion mit der Variation 1 gesetzt werden. So kann z. B. die Operation $A(g)$ durch

$$A(g) = \frac{\int_0^1 hg\,dx}{\int_0^1 h\,dx}$$

ersetzt werden, wobei h eine feste, positive, stetige Funktion bedeutet.

(*Eingegangen am 22. November 1930.*)